

**Unit commitment.** In una regione sono presenti impianti termoelettrici ed idroelettrici per la produzione di energia.

Quando un impianto termoelettrico è acceso, è vincolato ad operare tra un dato un livello minimo ed un dato livello massimo di potenza (in generale questi limiti sono diversi per ogni impianto); se invece è spento, ovviamente la sua produzione è nulla. Si ipotizzi che ogni impianto termoelettrico possa cambiare stato solo al passaggio da un giorno al successivo e non durante il giorno. Mantenere un impianto termoelettrico acceso ha un costo fisso, che si paga per ogni giorno durante il quale l'impianto è acceso. Ogni impianto termoelettrico ha un costo unitario noto per la produzione di energia.

Ogni impianto idroelettrico è caratterizzato da una capacità del bacino, un volume di acqua inizialmente disponibile ed una portata di acqua in ingresso (dovuta agli affluenti che lo alimentano), che si assume costante nel tempo. È noto un coefficiente che si usa per trasformare una quantità di acqua in un'equivalente quantità di energia prodotta con quell'acqua. Tale coefficiente si assume uguale per tutti gli impianti idroelettrici.

È nota la domanda complessiva di energia (frutto di una previsione) per alcuni giorni. Si vuole calcolare il piano di produzione di energia di minimo costo, che soddisfi la domanda.

Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati del file UCP.TXT.

Discutere ottimalità e unicità della soluzione ottenuta.

Si supponga di aver fissato i giorni di accensione e di spegnimento dei tre impianti termoelettrici. Si vuole sapere fino a che punto il sistema sarebbe in grado di assorbire variazioni della domanda (in eccesso e in difetto) in un dato giorno (per esempio il giorno n.4), variando entro i limiti consentiti le produzioni (sia termoelettriche che idroelettriche) e come cambierebbero di conseguenza i costi.

**Dati.** Gli impianti termoelettrici sono 3. Gli impianti idroelettrici sono 3. I giorni da pianificare sono 7.

Nel seguito si indicano con:

- u.e.: unità di misura dell'energia
- u.v.: unità di misura del volume di acqua
- u.d.: unità di misura del denaro
- g: giorno

Coefficiente di trasformazione:  $0.05 \text{ [u.e./u.v.]}$ .

Table 1: Impianti termoelettrici

Impianto	Prod.min. [u.e./g]	Prod.max. [u.e./g]	Costo fisso [u.d./g]	Costo unitario [u.d./u.e.]
1	10	90	60	2
2	20	100	50	3
3	20	20	40	5

Table 2: Impianti idroelettrici

Impianto	Capacità [u.v.]	Vol. iniz. [u.v.]	Alimentazione [u.v./g]
1	600	500	200
2	2000	1500	400
3	300	100	100

Giorno	Domanda [u.e.]
1	200
2	180
3	150
4	200
5	250
6	250
7	180

**Soluzione.** Le variabili del problema, continue e non-negative, rappresentano le quantità di energia da produrre in ogni impianto termoelettrico ed idroelettrico. Poiché i due sottosistemi di produzione hanno caratteristiche diverse, vanno rappresentati separatamente.

Siano  $T$  l'insieme degli impianti termoelettrici,  $H$  l'insieme degli impianti idroelettrici e  $G$  l'insieme dei giorni da pianificare.

Per ogni giorno  $g \in G$ , ad ogni impianto termoelettrico  $t \in T$  va associata una variabile binaria  $y_{tg}$ : essa rappresenta lo stato acceso/spento dell'impianto in quel giorno. Inoltre, una variabile continua  $x_{tg} \geq 0$  indica la quantità di energia prodotta da ogni impianto  $t \in T$  in ogni giorno  $g \in G$ . Tale variabile è limitata inferiormente e superiormente dai due limiti dati,  $\underline{p}_t$  e  $\bar{p}_t$ , che valgono nel caso di impianto acceso. Entrambi i limiti vengono posti a zero nel caso di impianto spento, forzando la produzione ad essere nulla in tal caso. Questo effetto si ottiene semplicemente moltiplicando i limiti inferiore e superiore per

la corrispondente variabile binaria:

$$\underline{p}_t y_{tg} \leq x_{tg} \leq \bar{p}_t y_{tg} \quad \forall t \in T, \forall g \in G.$$

Nella funzione obiettivo i costi dovuti alla produzione di energia da impianti termoelettrici è data da due contributi: uno è rappresentato dai costi fissi ( $f_t$  per ogni giorno di accensione dell'impianto  $t \in T$ ) e dipende dalle variabili binarie, l'altro è rappresentato dai costi di produzione e dipende dalle variabili continue e dai costi unitari di produzione  $v_t$ :

$$\sum_{t \in T, g \in G} (f_t y_{tg} + v_t x_{tg}).$$

Gli impianti idroelettrici hanno uno stato, rappresentato dal livello del bacino. Per ogni impianto si definisce quindi una variabile continua  $L_{hg}$  che indica il livello del bacino  $h \in H$  al termine del giorno  $g \in G$ . Essa può variare tra zero e la capacità  $Q_h$  del bacino:

$$0 \leq L_{hg} \leq Q_h \quad \forall h \in H, \forall g \in G.$$

Si definiscono quindi i classici vincoli di conservazione del flusso, che impongono che il livello del bacino al termine del giorno  $g - 1$  più la quantità  $a_h$  di acqua che affluisce ogni giorno sia pari alla quantità di acqua  $z_{ig}$  utilizzata nel giorno  $g$  per produrre energia più il livello del bacino al termine del giorno  $g$ :

$$L_{h,g-1} + a_h = z_{hg} + L_{hg} \quad \forall h \in H, \forall g \in G : g > 1.$$

Per il primo giorno,  $g = 1$ , il vincolo va scritto sostituendo a  $L_{h,g-1}$  il livello iniziale  $L_h^0$  del bacino. Gli impianti idroelettrici non generano costi e quindi le variabili  $L$  e  $z$  non compaiono nella funzione obiettivo.

Il vincolo di soddisfacimento della domanda impone che in ogni giorno  $g \in G$  la produzione complessiva di tutti gli impianti sia pari alla domanda  $d_g$ :

$$\sum_{t \in T} x_{tg} + \sum_{h \in H} \alpha z_{hg} = d_g \quad \forall g \in G.$$

Il modello risultante è di PLI.

$$\begin{aligned} \text{minimize } w &= \sum_{t \in T, g \in G} (f_t y_{tg} + v_t x_{tg}) \\ \text{s.t. } &\sum_{t \in T} x_{tg} + \sum_{h \in H} \alpha z_{hg} = d_g && \forall g \in G \\ &L_{h,g-1} + a_h = z_{hg} + L_{hg} && \forall h \in H, \forall g \in G : g > 1 \\ &L_h^0 + a_h = z_{h1} + L_{h1} && \forall h \in H \\ &y_{tg} \text{ binary} && \forall t \in T, \forall g \in G \\ &\underline{p}_t y_{tg} \leq x_{tg} \leq \bar{p}_t y_{tg} && \forall t \in T, \forall g \in G \\ &z_{hg} \geq 0 && \forall h \in H, \forall g \in G \\ &0 \leq L_{hg} \leq Q_h && \forall h \in H, \forall g \in G. \end{aligned}$$

La soluzione ottima ha un costo pari a 3220. Essa prevede di avere l'impianto termoelettrico 1 sempre acceso, l'impianto 3 sempre spento e l'impianto 2 spento nei giorni  $g = 2$  e  $g = 7$  e acceso negli altri. In assenza di vincoli che lo impediscano, il livello di tutti i bacini idroelettrici, come è prevedibile, risulta azzerato al termine del periodo di pianificazione.

L'ottimalità della soluzione è garantita, trattandosi di un modello di PLI. Non c'è garanzia che l'assegnamento ottimale di valori binari alle variabili  $y$  sia unico. Inoltre, anche fissate le  $y$ , la parte continua della soluzione certamente non è unica, poiché il consumo di acqua di diversi bacini idroelettrici è intercambiabile a parità di energia generata.

La seconda parte dell'esercizio richiede di fissare le variabili binarie  $y$  al loro valore corrispondente alla soluzione ottima. Il sotto-problema restante è un problema di PL sul quale si può eseguire l'analisi parametrica al variare della domanda nel giorno 4, come richiesto.

Basta modificare il vincolo di domanda nel giorno  $g = 4$ , introducendo al termine noto un dato  $\epsilon$  che rappresenta la variazione della domanda. Si ha quindi

$$\sum_{t \in T} x_{t4} + \sum_{h \in H} \alpha z_{h4} = d_4 + \epsilon.$$

L'analisi di sensitività all'ottimo rivela che  $\epsilon$  può aumentare di 25 unità senza cambi di base. Per  $\epsilon = 25$  si ha  $w^* = 3295$ . Risolvendo nuovamente il modello con un valore di  $\epsilon$  leggermente superiore a 25, si ottiene all'analisi di sensitività che il successivo cambio di base si ha per  $\epsilon = 30$ , cui corrisponde un valore ottimo  $w^* = 3310$ . Infine, per  $\epsilon > 30$  il problema non ammette più soluzione.

Analogamente, si può studiare come diminuisce  $w^*$  al diminuire della domanda, cioè di  $\epsilon$ . Si ha un cambio di base per  $\epsilon = -10$  con  $w^* = 3190$  ed un altro cambio di base per  $\epsilon = -90$  con  $w^* = 2950$ . Fino a questo punto il costo marginale della domanda nel giorno 4 è sempre pari a 3 u.c/u.e. Sotto a questo valore invece esso diventa pari a 2 u.c/u.e., fino al successivo - e ultimo - cambio di base, che si ha per  $\epsilon = -170$  con  $w^* = 2790$ . Un ulteriore diminuzione della domanda nel giorno 4 rende inammissibile il problema.